PEMBUKTIAN AUTOMORFISMA PADA GELANGGANG POLINOM MIRING UNTUK PEMBENTUKAN GELANGGANG POLINOM MIRING BERSUSUN

Amir Kamal Amir

Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin
Jl. Perintis Kemerdekaan KM.10 Makassar
email : amirkamalamir@yahoo.com

Abstract

Let R be any ring with identity 1, σ_1 be an endomorphism of R and δ_1 be a σ_1-derivation. The skew polynomial ring over R in an indeterminate x_1, denoted by $R[x_1;\sigma_1,\delta_1]$, is the set of polynomials $a_n x_1^n + a_{n-1}x_1^{n-1} + \cdots + a_0$ where $a_i \in R$ with multiplication rule $x_1 a = \sigma_1(a)x_1 + \delta_1(a)$ for all $a \in R$. In this paper, it will be proved an automorphism σ_2 on the skew polynomial ring $R[x_1;\sigma_1,\delta_1]$, such that with that automorphism we can construct a iterated skew polynomial ring with variabel x_1 and x_2, i.e., $R[x_1;\sigma_1,\delta_1][x_2;\sigma_2]$.

***Keywords**: automorphism, ring, iterated, skew, polynomial.*

A. PENDAHULUAN

Gelanggang polinom miring dengan gelanggang tumpuan gelanggang *R,* disimbol $R[x;\ \sigma,\delta]$, adalah gelanggang yang terdiri dari polinom-polinom $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ dengan aturan perkalian yang tidak bersifat komutatif. Dalam gelanggang polinom miring $R[x;\ \sigma,\delta]$, aturan perkalian adalah $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$ untuk setiap $a \in R$. Karena gelanggang polinom miring juga merupakan gelanggang, maka gelanggang polinom miring $R[x;\ \sigma,\delta]$ tentu saja bisa dijadikan sebagai gelanggang tumpuan dari gelanggang polinom miring yang baru.

Misalkan gelanggang polinom miring $R[x_1;\sigma_1,\delta_1]$ akan dijadikan gelanggang tumpuan dari suatu gelanggang polinom miring, maka dikonstruksi endomorfisma σ_2 dan σ_2-derivatif δ_2 pada $R[x_1;\sigma_1,\delta_1]$. Dari sini diperoleh gelanggang polinom miring atas $R[x_1;\sigma_1,\delta_1]$ dalam variabel x_2, $R[x_1;\sigma_1,\delta_1][x_2;\sigma_2,\delta_2]$, yaitu gelanggang polinom yang terdiri dari polinom-polinom $a_n(x_1)x_2^n + a_{n-1}(x_1)x_2^{n-1} + \cdots + a_0(x_1)$ dengan $a_i(x_1) \in R[x_1;\sigma_1,\delta_1]$, aturan penjumlahan standar, dan aturan perkalian $x_2 a(x_1) = \sigma_2(a(x_1))x_2 + \delta_2(a(x_1))$ untuk setiap $a(x_1) \in R[x_1;\sigma_1,\delta_1]$. Gelanggang polinom miring

$R[x_1;\sigma_1,\delta_1][x_2;\sigma_2,\delta_2]$ disebut gelanggang polinom miring bersusun. Leroy dan Matczuk (2011) memberikan syarat cukup dan perlu bentuk perancangan endomorfisma σ_2. Namun demikian, mereka tidak memberikan uraian pembuktiannya. Paper ini akan menyajikan uraian pembuktian lengkap tentang syarat cukup dan perlu tersebut.

B. METODOLOGI

Penelitian ini bersifat pengembangan teori keilmuan (Matematika Aljabar) dengan fokus kajiannya pembangunan teori-teori gelanggang polinom miring. Oleh karena itu, metode yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan pada penelitian ini adalah suatu metode yang mengacu pada langkah-langkah penelitian teoritik. Lebih jelasnya, penelitian ini akan menggunakan pendekatan eksploratif dan adaptasi. Khususnya, dalam hal ini akan dimanfaatkan pengetahuan yang peneliti miliki dari penelitian-penelitian sebelumnya dan hasil-hasil lain yang telah ada di letratur.

C. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Beberapa Pengertian dan Notasi

Cara mengkonstruksi gelanggang polinom miring dan pengertian gelanggang polinom miring yang diuraikan berikut dapat dibaca pada Goodearl dan warfield (1989:8) dan Mc Connel dan Robson (1987:15). Pada bagian ini akan diuraikan beberapa pengertian dan notasi yang akan digunakan pada bagian pembahasan.

3.1.1 Gelanggang Polinom Miring

Misalkan R suatu gelanggang, σ suatu endomorfisma di R, dan δ suatu σ-derivatif, yaitu:

1. δ suatu endomorfisma grup di R.
2. $\delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)b$ untuk setiap $a, b \in R$.

Gelanggang polinom miring $R[x;\ \sigma,\delta]$ dalam variabel tak diketahui x berisi semua polinom dengan koefisien di R yang memenuhi aturan perkalian sebagai berikut: untuk setiap $a \in R$ berlaku $xa = \sigma(a)x\ + \delta(a)$. Untuk kasus khusus dimana $\delta = 0$, gelanggang polinom miring $R[x;\ \sigma,\delta]$ ditulis $R[x;\ \sigma]$. Sedangkan untuk kasus dimana R sendiri sudah merupakan gelanggang polinom miring, $R[x;\ \sigma,\delta]$ disebut gelanggang polnom miring bersusun. Pengertian gelanggang polinom miring bersusun diambil dari Cohn (1995:78).

Contoh 1 [Amir, 2012]

Misalkan $R = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-5}$. Automorfisma σ pada R didefinisikan sebagai $\sigma\left(a + b\sqrt{-5}\right) = a - b\sqrt{-5}$ untuk setiap $a\ + b\sqrt{-5}\ \in R$. Selanjutnya pemetaan δ didefinisikan sebagai $\delta\left(a + b\sqrt{-5}\right) = b$ untuk setiap $a\ + b\sqrt{-5}\ \in R$. Pemetaan δ yang didefinisikan seperti ini memenuhi syarat $\sigma -$derivatif. Dengan demikian, $R[x;\ \sigma,\delta]$ merupakan suatu gelanggang polinom miring.

3.2 Hasil Penelitian dan Pembahasan

Gelanggang polinom miring yang akan dibahas adalah gelanggang polinom miring yang dibentuk dari gelanggang polinom miring yang lain atau dengan kata lain, gelanggang polinom miring bersusun. Dari definisi gelanggang polinom miring terlihat bahwa pembentukan gelanggang tersebut ditentukan oleh endomorfisma pada gelanggang tumpuannya. Oleh karena itu, penelitian ini membuktikan endomorfisma (dalam kasus ini automorfisma) pada gelanggang polinom miring. Hasil berikut ini menunjukkan bahwa automorfisma pada suatu gelanggang dapat dikembangkan menjadi automorfisma pada gelanggang polinom miring yang menggunakan gelanggang tersebut sebagai gelanggang tumpuan. Proses pembuktian berikut menggunakan pengertian endomorfisma atau automorfisma. Pengertian tengtang hal ini diperoleh dari Fralegh (1994:191).

Lema 3.1

Misalkan σ_1, σ_2 adalah automorfisma dan δ_1 adalah σ_1-derivatif pada gelanggang R dan misalkan $\lambda \in R$ mempunyai invers. Automorfisma σ_2 pada gelanggang R dapat dikembangkan menjadi automorfisma pada gelanggang $R[x_1; \sigma_1, \delta_1]$ dengan menetapkan $\sigma_2(x_1) = \lambda x_1$ jika dan hanya jika $\sigma_2\sigma_1(r) = \lambda\sigma_1\sigma_2(r)\lambda^{-1}$ dan $\sigma_2\delta_1(r) = \lambda\delta_1\sigma_2(r)$ untuk setiap $r \in R$.

Bukti:

Untuk menunjukkan bahwa σ_2 adalah automorfisma gelanggang $R[x_1; \sigma_1, \delta_1]$, akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $p(x_1), q(x_1) \in R[x_1; \sigma_1, \delta_1]$ berlaku:

(i) $\sigma_2\,(p(x_1) + q(x_1)) = \sigma_2(p(x_1)) + \sigma_2(q(x_1))$

(ii) $\sigma_2\,(p(x_1)q(x_1)) = \sigma_2(p(x_1))\sigma_2(q(x_1))$.

(iii) σ_2 merupakan pemetaan satu-satu.

(iv) σ_2 merupakan pemetaan pada.

(i). Pembuktian (i) tidak disajikan karena langkah pembuktiannya cukup sederhana.

(ii). Untuk pembuktian bagian (ii), sebagai langkah pertama, dimisalkan $s(x_1) = ax_1 + b$ dan $t(x_1) = cx_1 + d$. Menggunakan aturan perkalian dalam gelanggang polinom miring $R[x_1; \sigma_1, \delta_1]$, diperoleh

$$
\begin{aligned}
s(x_1)t(x_1) &= (ax_1 + b)(cx_1 + d) \\
&= a[\sigma_1(c)x_1 + \delta_1(c)]x_1 + bcx_1 + a[\sigma_1(d)x_1 + \delta_1(d)] + bd \\
&= a\sigma_1(c)x_1^2 + a\delta_1(c)x_1 + bcx_1 + a\sigma_1(d)x_1 + a\delta_1(d) + bd.
\end{aligned}
$$

Dengan demikian,

$$\sigma_2[s(x_1)t(x_1)] =$$

$$\sigma_2[a\sigma_1(c)x_1^2 + a\delta_1(c)x_1 + bcx_1 + a\sigma_1(d)x_1 + a\delta_1(d) + bd] =$$

$$\sigma_2(a)\sigma_2(\sigma_1(c))\lambda\sigma_2(\lambda)x_1^2 + \sigma_2(a)\sigma_2(\sigma_1(c))\lambda\delta_1(\lambda)x_1$$

$$+\sigma_2(a)\sigma_2\,(\delta_1(c))\,\lambda x_1 + \sigma_2(b)\sigma_2\,(c)\,\lambda x_1$$

$+\ \sigma_2(a)\sigma_2\,(\sigma_1(d))\lambda x_1 +\ \sigma_2(a)\sigma_2\,(\delta_1(d))\ +\sigma_2(b)\sigma_2\,(d).$ . . . . (1).

Pada sisi lain,

$\sigma_2[s(x_1)] = \sigma_2(ax_1 + b) =\ \sigma_2(a)\,\lambda x_1\ +\ \ \sigma_2(b),$ dan

$\sigma_2[t(x_1)] = \sigma_2(cx_1 + d) =\ \sigma_2(c)\,\lambda x_1\ +\ \ \sigma_2(d).$

Sehingga, menggunakan aturan perkalian dalam gelanggang polinom mring $R[x_1; \sigma_1, \delta_1]$, diperoleh berikut.

$\sigma_2[s(x_1)]\sigma_2[t(x_1)] = \sigma_2(ax_1 + b)\,\sigma_2(cx_1 + d)$

$= [\sigma_2(a)\,\lambda x_1\ +\ \ \sigma_2(b)][\sigma_2(c)\,\lambda x_1\ +\ \ \sigma_2(d)]$

$=\ \sigma_2(a)\,\lambda x_1\,[\sigma_2(c)\,\lambda x_1\ +\ \ \sigma_2(d)] +\ \ \sigma_2(b)[\sigma_2(c)\,\lambda x_1\ +\ \ \sigma_2(d)]$

$= \sigma_2(a)\,\lambda x_1\sigma_2(c)\,\lambda x_1\ +\ \sigma_2(a)\,\lambda x_1\sigma_2(d)\ +\ \sigma_2(b)\sigma_2(c)\,\lambda x_1 +\ \sigma_2(b)\sigma_2(d)$

$= \sigma_2(a)\,\lambda\,[\sigma_1(\sigma_2(c)\,\lambda)x_1^2 + \delta_1(\sigma_2(c)\,\lambda)x_1]\ +\ \sigma_2(a)\,\lambda[\sigma_1(\sigma_2(d))x_1 + \delta_1(\sigma_2(d))]$

$+ \sigma_2(b)\sigma_2(c)\,\lambda x_1 +\ \sigma_2(b)\sigma_2(d)$

$= \sigma_2(a)\,\lambda\,\sigma_1(\sigma_2(c))\,\sigma_1(\lambda)x_1^2 + [\sigma_2(a)\,\lambda\sigma_1\big(\sigma_2(c)\big)\delta_1(\lambda) + \sigma_2(a)\,\lambda\,\delta_1(\sigma_2(c))\lambda]x_1$

$+ [\sigma_2(a)\,\lambda\,\sigma_1(\sigma_2(d)) + \sigma_2(b)\sigma_2(c)\,\lambda]x_1$

$+\big[\sigma_2(a)\,\lambda\delta_1(\sigma_2(d)\big) + \sigma_2(b)\sigma_2(d)]$ . . . . (2).

Untuk langkah selanjutnya, perhatikan kondisi lema, yaitu $\sigma_2(x_1) = \lambda x_1$ jika dan hanya jika $\sigma_2\sigma_1(r) = \lambda\sigma_1\sigma_2(r)\lambda^{-1}$ dan $\sigma_2\delta_1(r) = \lambda\delta_1\sigma_2(r)$ untuk setiap $r \in R$. Kondisi lema secara implisit menegaskan bahwa:

$\sigma_2(x_1^2) = \sigma_2(x_1)\sigma_2(x_1) = (\lambda x_1)(\lambda x_1) = \lambda\big(\sigma_1(\lambda)x_1 + \delta_1(\lambda)\big)x_1$

$= \lambda\sigma_1(\lambda)x_1^2 + \lambda\delta_1(\lambda)x_1.$ . . . . (3)

Menggunakan kondisi lema dan persamaan (3), maka persamaan (2) menjadi seperti berikut.

$\sigma_2[s(x_1)]\sigma_2[t(x_1)] =$

$\sigma_2(a)\ \ \sigma_2(\sigma_1(c))\,\lambda\,\sigma_1(\lambda)x_1^2\ + [\sigma_2(a)\,\sigma_2\big(\sigma_1(c)\big)\lambda\delta_1(\lambda) + \sigma_2(a)\,\sigma_2(\delta_1(c))\lambda]x_1$

$+ [\sigma_2(a)\ \ \sigma_2(\sigma_1(d))\lambda +\ \sigma_2(b)\sigma_2(c)\,\lambda]x_1$

$+\left[\sigma_2(a)\,\sigma_2(\delta_1(d)\right)+\sigma_2(b)\sigma_2(d)]$ . . . . (4).

Dari persamaan (1) dan (4) diperoleh

$\sigma_2[s(x_1)t(x_1)]=\sigma_2[s(x_1)]\sigma_2[t(x_1)]$ . . . . (5).

Selanjutnya, misalkan $p(x_1)=a_n x_1^n+a_{n-1}x_1^{n-1}+\ ...+\ a_0$ dan $q(x_1)=b_m x_1^n+b_{m-1}x_1^{n-1}+\ ...+\ b_0$. Karena polinom $p(x_1)$ dan $q(x_1)$ hanya merupakan perkalian polinom-polinom yang berbentuk $s(x_1)$ dan $t(x_1)$, maka menggunakan (5) dapat disimpulkan bahwa $\sigma_2[p(x_1)q(x_1)]=\sigma_2[p(x_1)]\sigma_2[q(x_1)]$.

(iii). Dari sifat $\sigma_2(x_1)=\lambda x_1$ diperoleh, jika $\sigma_2(ax_1)=\sigma_2(bx_1)$, maka $a=b$. Dengan dasar ini, maka dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa:

Jika $\sigma_2[p(x_1)]=\sigma_2[q(x_1)]$, maka $p(x_1)=q(x_1)$.

(iii). Dari sifat $\sigma_2(x_1)=\lambda x_1$ diperoleh, untuk $ax_1\in R[x_1;\sigma_1,\delta_1]$, dapat dipilih $\sigma_2^{-1}(\lambda^{-1}a)x_1\in R[x_1;\sigma_1,\delta_1]$ sedemikian sehingga $\sigma_2(\ \sigma_2^{-1}(\lambda^{-1}a)x_1)=ax_1$. Dengan dasar ini, maka dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa:

Untuk setiap $q(x_1)\in R[x_1;\sigma_1,\delta_1]$, dapat dipilih $p(x_1)\in R[x_1;\sigma_1,\delta_1]$ sedemikian sehingga $\sigma_2(p(x_1))=\ q(x_1)$. ■

D. KESIMPULAN

Pembentukan gelanggang polinom miring sangat ditentukan oleh pembentukan endomorfisma pada gelanggang tumpuan dari gelanggang polinom miring tersebut. Hal ini berarti bahwa, pembentukan gelanggang polinom miring bersusun ditentukan oleh pembentukan endomorfisma pada gelanggang polinom miring yang dijadikan gelanggang tumpuan. Hasil pembuktian Lema 3.1 menunjukan bahwa endomorfisma (dalam kasus ini adalah automorfisma) σ_2 pada gelanggang R (gelangang biasa) dapat dikembangkan menjadi automorfisma pada gelanggang $R[x_1;\sigma_1,\delta_1]$ (gelanggang polinom miring) dengan kondisi tertentu. Dengan demikian, karena σ_2 adalah automorfisma pada gelanggang $R[x_1;\sigma_1,\delta_1]$, maka dapat dibentuk gelanggang polinom miring bersusun $R[x_1;\sigma_1,\delta_1][x_2;\sigma_2]$.

DAFTAR PUSTAKA

Amir, A.K. (2012). *Pembentukan Gelanggang Polinom Miring dari Quaternion*, Jurnal Sains dan Teknologi KAUNIA, Vol. VIII. N0.1, Hal. 21-30.

Cohn, P.M. (1995) . *Skew Fields, Theory of General Division Rings*, Cambridge University Press, Cambridge.

Fraleigh, J.B. (1994). *A First Course in Abstract Algebra*, Addison-Wisley Publishing Company, USA.

Goodearl, K.R., dan Warfield, R.B. (1989). *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings,* Cambridge University Press, Cambridge.

Leroy, A. dan Matczuk, J. (2011). *On q-Skew Iterated Ore Extensions Satisfying a Polynomial Identity,* Journal of Algbera and Its Applications, Vol. 10, Issue 04, page. 771-781.

McConnell, J.C., and Robson, J.C. (1987). *Noncommutative Noetherian Rings,* John Wiley and Sons, Inc.